Решение многокритериальной задачи нечеткого параметрического выбора на трехдольном графе

Н.А. Алейникова, e-mail: balbashovan@mail.ru
М.Г. Матвеев, e-mail: mgmatveev@yandex.ru

Воронежский государственный университет

Аннотация. *Описаны этапы решения задачи параметрического выбора на трехдольном графе, в условиях, когда критерий предпочтения является нечетким вектором.*

Ключевые слова: *граф, параметрический выбор, транспортная задача, нечеткая переменная, агрегирование, интеграл Шоке, нечеткая мера Сугено.*

Введение

Рассматривается задача выбора на трехдольном графе. На практике часто встречаются социально-экономические системы, описываемые такими графами. Подобные системы включают в себя три множества вершин (элементов). Два внешних множества элементов будем ассоциировать с игроками (назовем их условно потребителями и поставщиками), внутреннее, промежуточное между ними множество – с альтернативами. Множество поставщиков обозначим через $V^1 = \{v_i^1\}, i = \overline{1,n}$, множество альтернатив через $V^2 = \{v_j^2\}, j = \overline{1,m}$, множество потребителей через $V^3 = \{v_k^3\}, k = \overline{1,d}$ На рисунке 1 представлена структурная схема такой системы. Примерами таких систем являются модель «производители-товары-магазины», биржевая модель B2B компании, «поставщики» - «ресурсы» - «производство» и т.д.

Актуальной задачей является определение того, какие связи могут быть сформированы между элементами этой системы для обеспечения возможности достижения ее максимальной функциональной эффективности. Поскольку кратность вершин каждого из трех множеств может превышать 1, то решается обобщенная задача о назначениях.

1. Формализация связей между элементами системы

Одна из особенностей данной задачи заключается в том, что критерий предпочтения, по которому расставляются связи между вершинами трех множеств, содержит две составляющие. Первая – это требования, предъявляемые потребителями к альтернативам, обозначим множество таких требований через вектор K^2, вторая – требования к поставщикам – вектор K^1.

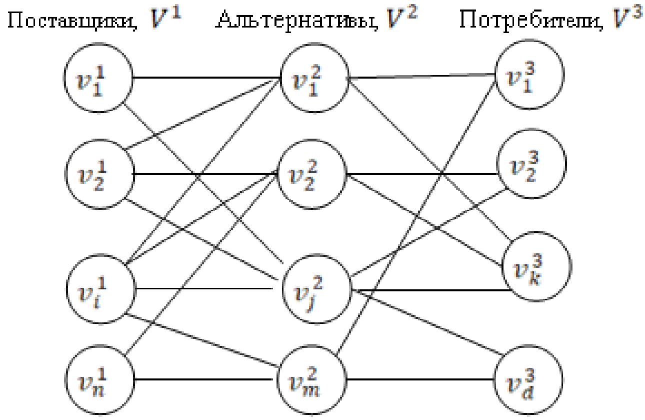

Рис. 1. Трехдольный граф

Современный подход при проектировании сложных технических объектов предполагает параметрический выбор связей между рассматриваемыми множествами. То есть векторы K^2 и K^1 включают в себя полный перечень требуемых характеристик альтернатив и поставщиков в виде набора целевых значений некоторых параметров (критериев). При этом целевые значения могут быть заданы как качественно, так и количественно. Параметрическое описание требований, с одной стороны расширяет возможности выбора, с другой стороны обеспечивает высокую степень детализации требований, что в свою очередь позволяет выбирать, в рамках имеющихся возможностей, наиболее эффективные связи между элементами множеств [1].

Важной особенностью параметрического задания требований является неравнозначность допустимых целевых значений для конкретного критерия из K^2 и K^1. Практически всегда из допустимого диапазона можно указать более желательные значения. Особенности задания критериев, такие как «расплывчатость» требований, обосновывают предположение о возможности использования теории нечетких множеств для описания их целевых значений. Кроме того, параметрическое задание требований при выборе существенно осложняется неоднородностью значимости самих критериев. Критерии обычно делят на «важные» и «менее важные» с точки зрения влияния на результат выбора. Сами векторы K^2 и K^1 могут конфликтовать друг с другом.

Обобщая сказанное выше, полагаем, что векторы требований являются нечеткими параметрическими векторами, где каждая компонента – это нечеткая или лингвистическая переменная. Каждая переменная имеет кусочно-линейные функции принадлежности $f_{\tilde{K}_j^2}(x)$ и $f_{\tilde{K}_j^1}(x)$, носители которых - $x_{\min} \le x \le x_{\max}$ отражают возможные целевые диапазоны значений критериев, а значения функции – их предпочтения. Для дискретных значений носителя функция принадлежности будет иметь табличный вид. Таким образом, поскольку каждый k-й потребитель предъявляет нечеткие требования к альтернативам, обозначим совокупность требований в виде нечеткого вектора $\tilde{K}_k^2 = \left(\tilde{K}_{k1}^2, \tilde{K}_{k2}^2, ..., \tilde{K}_{kp}^2\right)_{k=\overline{1.d}}$. Аналогично, совокупность требований к поставщикам обозначим нечетким вектором с элементами $\tilde{K}_k^1 = \left(\tilde{K}_{k1}^1, \tilde{K}_{k2}^1, ..., \tilde{K}_{kp}^1\right)_{k=\overline{1.d}}$.

В свою очередь, будем считать, что альтернативы и поставщики имеют четкие значения по каждому критерию. Совокупность значений для j-й альтернативы по каждому критерию из $\tilde{K}_k^2$ представляется в виде четких значений компонент вектора – $q_j = (q_j^1;...;q_j^p)$, *j*-я компонента которого принимает значения либо на количественной, либо на качественной шкале, $j = \overline{1,m}$. Совокупность четких значений для i-го поставщика по каждому критерию из $\tilde{K}_k^1$ по j-й альтернативе представляется в виде значений компонент матрицы $g_{ij} = (g_{ij}^1;...g_{ij}^r)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Соответствие альтернативы или поставщика требованиям по одному критерию из $\tilde{K}_k^2$ или $\tilde{K}_k^1$ будем называть локальным соответствием. Мера локального соответствия пары «альтернатива v_j^2 – потребитель v_k^2» по критерию $\tilde{K}_{kl}^2$ из $\tilde{K}_k^2$ вычисляется путем подстановки соответствующего четкого значения координаты вектора q_j в функцию принадлежности $f_{\tilde{K}_l^2}(x)$. Обозначим ее через

$\mu^{l}_{jk}, l = \overline{1, p}$. Мера локального соответствия пары «поставщик v^1_i – альтернатива v^2_j» определяется путем подстановки соответствующего четкого значения элемента матрицы g_{ij} в функцию принадлежности $f_{\tilde{K}^1_j}(x)$. Обозначим ее через $\eta^{s}_{ij}, s = \overline{1, r}$. При назначении связей выбираться будут такие пары, локальные соответствия которых лучше всего соответствует заданному «идеалу» по всей совокупности критериев.

Поскольку критерии неравнозначны, то можно, например, экспертным путем назначить веса каждого критерия, которые будем обозначать $\varphi\left(\tilde{K}^2_j\right)$ или $\varphi\left(\tilde{K}^1_j\right)$.

2. Построение обобщенного показателя эффективности

Следовательно, возникает еще одна проблема, для формирования эффективных связей между элементами множеств V^1, V^2 и V^3 необходимо определить совокупную степень соответствия конкретного вида поставщика и альтернативы нечетким требованиям по множеству локальных соответствий с учетом неравнозначности каждого критерия. Эту задачу можно решить методами нечеткого логического вывода, путем построения экспертом системы нечетких продукционных правил. Но таких правил может быть очень много, что делает практически невозможным нечеткий логический вывод. Более того, эксперт столкнется еще с одной трудностью – проблемой учета противоречивости локальных соответствий, то есть соответствий по значениям отдельных характеристических параметров. Например, по ряду параметров достигается хорошее соответствие, зато по другим соответствие требованиям невысокое; сформулировать степень обобщенного соответствия затруднительно уже при десятке параметров [2].

Предлагается другой путь, который позволит вычислять агрегированное соответствие (обозначим его соответственно через μ_{jk} и η_{ij}) на основе найденных локальных соответствий с учетом нелинейного характера влияния критериев друг на друга и в целом на обобщенный показатель эффективности.

В соответствии с работой [3] «агрегирование числовых критериев есть метод их объединения в один числовой критерий (результат агрегирования) для выражения совокупного действия этих критериев»

Оператором агрегирования часто называют обладающую некоторыми заданными свойствами функцию от N переменных (критериев) $agr(x_1,..., x_N)$, каждая из которых определена на единичном интервале. Областью значений этой функции также является единичный интервал. Функция должна отвечать ряду обязательных условий:

– полное локальное несоответствие ($\mu_{jk}^{l} = 0$ или $\eta_{ij}^{s} = 0$) хотя бы по одному параметру влечет полное агрегированное несоответствие;
– полное агрегированное соответствие ($\mu_{jk} = 1$ или $\eta_{ij} = 1$) может достигаться только при полном локальном соответствии по всем характеристическим параметрам ($\mu_{jk}^{l} = 1,\ l = \overline{1, p}$ или $\eta_{ij}^{s} = 1,\ s = \overline{1, r}$).
– $agr(x_1;...; x_N) \le agr(y_1;...; y_N)$, если $(x_1;...; x_N) \le (y_1;...; y_N)$.

В качестве такой функции предлагается использовать интеграл Шоке, который применяется для агрегирования, когда на результат влияет величина каждого из критериев. Вычисление интеграла Шоке основано на λ-нечеткой мере Сугено, которая выражает субъективный вес или значимость каждого подмножества критериев и определяется следующим образом

$$\varphi\left(\left\{K_j,\ j \in M^1\right\}\right) = \frac{\left[\prod\limits_{j \in M}\left(1 + \lambda\varphi_j\right) - 1\right]}{\lambda}, \quad M^1 \subseteq M \qquad (1)$$

где φ_j – коэффициенты важности отдельно взятых частных показателей эффективности при построении обобщенного показателя, в нашем случае – это веса, назначенные экспертами $\varphi\left(\tilde{K}_j^2\right)$ или $\varphi\left(\tilde{K}_j^1\right)$, М – множество индексов $\overline{1, p}$ или $\overline{1, r}$, параметр λ можно найти из уравнения:

$$\lambda + 1 - \prod_{j \in M}\left(1 + \lambda\varphi_j\right) = 0; \quad \lambda > -1, \lambda \ne 0, \qquad (2)$$

Тогда интеграл Шоке для нахождения агрегированного соответствия μ_{jk} рассчитывается по формуле

$$\mu_{jk} = agr\left(\mu_{jk}^{1},\ldots,\mu_{jk}^{p}\right) = \sum_{l=1}^{p}\left(\mu_{jk}^{(l)} - \mu_{jk}^{(l-1)}\right)p\left(x / f_{\tilde{K}_l^2}(x) \geq \mu_{jk}^{(l)}\right), \qquad (3)$$

где $\mu_{jk}^{(1)}, \mu_{jk}^{(2)},\ldots, \mu_{jk}^{(p)}$ – перестановка элементов $\mu_{jk}^{1}, \mu_{jk}^{2},\ldots, \mu_{jk}^{p}$ такая, что $\mu_{jk}^{(1)} \leq \mu_{jk}^{(2)} \leq \ldots \leq \mu_{jk}^{(p)}$, $\mu_{jk}^{(0)} = 0$; x – это подмножество компонент вектора q_j. При этом, если хотя бы одно локальное соответствие равно 0, то считаем, что $\mu_{jk} = 0$.

Нахождение агрегированных соответствий η_{ij} происходит аналогично.

Таким образом, получаем две матрицы агрегированных соответствий поставщиков альтернативам $\left(\mu_{jk}\right)_{j=\overline{1,n};k=\overline{1,d}}$ и альтернатив потребителям $\left(\eta_{ij}\right)_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,n}}$.

3. Оптимизация связей между элементами системы

Следующая задача, это оптимизация связей между элементами графа (рисунок 1) для обеспечения возможности достижения максимальной функциональной эффективности. Ее уже можно решать как задачу о назначении, где целевыми коэффициентами будут элементы матриц агрегированных соответствий или как транспортную задачу, если будут дополнительно заданы количества альтернатив, которые могут поставить поставщики w_{ij}, и потребности потребителей в альтернативах v_k. Свертку требований, предъявляемых потребителями к альтернативам и требований к поставщикам по каждой альтернативе, формализуем выпуклой линейной комбинацией

$$a\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij} + (1-a)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}\eta_{jk}, \qquad (4)$$

где a – параметр, $a \in [0,1]$.

Обозначим через x_{ij} количество альтернатив j-го типа от i-го поставщика, через y_{jk} – количество альтернатив j-го типа, назначенных k-й заявке. Математическая модель транспортной задачи для оптимального распределения альтернатив от поставщиков по потребителям имеет вид:

$$a\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}x_{ij}+(1-a)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}\eta_{jk}y_{jk}\rightarrow \max$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}y_{jk}=v_k\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=\sum_{k=1}^{d}y_{jk}\\ x_{ij}\le w_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\end{cases}, \qquad (5)$$

$$x_{ij},y_{jk}\in\{0,Z^{+}\},i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,d}.$$

Как уже говорилось, a – параметр, меняется в пределах от 0 до 1. Чем ближе a к 1, тем важнее соответствие техническим требованиям, чем ближе к 0, тем важнее коммерческие требования.

Первое ограничение модели (5): количество альтернатив, которые поступают от поставщиков, должно полностью удовлетворить потребности всех k потребителей.

Второе ограничение: суммарное количество j-ой альтернативы, полученной от всех поставщиков, должно быть полностью распределено по потребителям.

Здесь важно не допустить дефицита альтернатив, то есть должно выполняться $\sum_{k=1}^{d}v_k\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}w_{ij}$. Иначе нужно вводить фиктивного поставщика.

Заключение

Особенность модели (5) состоит в том, что она обеспечивает одновременное удовлетворение коммерческим требованиям при выборе поставщика и техническим требованиям при распределении альтернатив по потребителям. При этом требования задаются «обезличенно», с помощью нечетких векторов, элементами которых являются нечеткие или лингвистические переменные. В условиях противоречивости коммерческих и технических требований задачу можно рассматривать как многоцелевую. Линейная свертка (4) позволяет найти одно из компромиссных решений с помощью варьирования параметра a, что обеспечивает возможность адаптации модели к меняющимся требованиям потребителей.

Литература

1. Будяков А. Н. Решение задачи выбора ресурсов и их поставщиков в условиях противоречивости технических и коммерческих требований / А. Н. Будяков, К. Г. Гетманова, М. Г. Матвеев // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – №. 2. – С. 66-71.
2. Matveev M. Models of Centralized Equipment Procurement Based on Supplier-Consumer Matching / Matveev M., Podvalny S. //2019 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – IEEE.– 2019. – C. 151-154.
3. Detyniecki M. et al. Mathematical aggregation operators and their application to video querying. PhD dissertation. Docteur de l'Universite. Paris. 2000.
4. Павлов А.Н. Принятие решений в условиях нечеткой информации: учеб. пособие / А.Н. Павлов, Б.В. Соколов; ГУАП– СПб. – 2006.–72 с.